La distritación como un problema de optimización

Mesas de análisis sobre la definición de las distritaciones electorales; principales retos técnicos en la mejora de la representación política 19 y 20 febrero 2015.

Miguel Ángel Gutiérrez Andrade

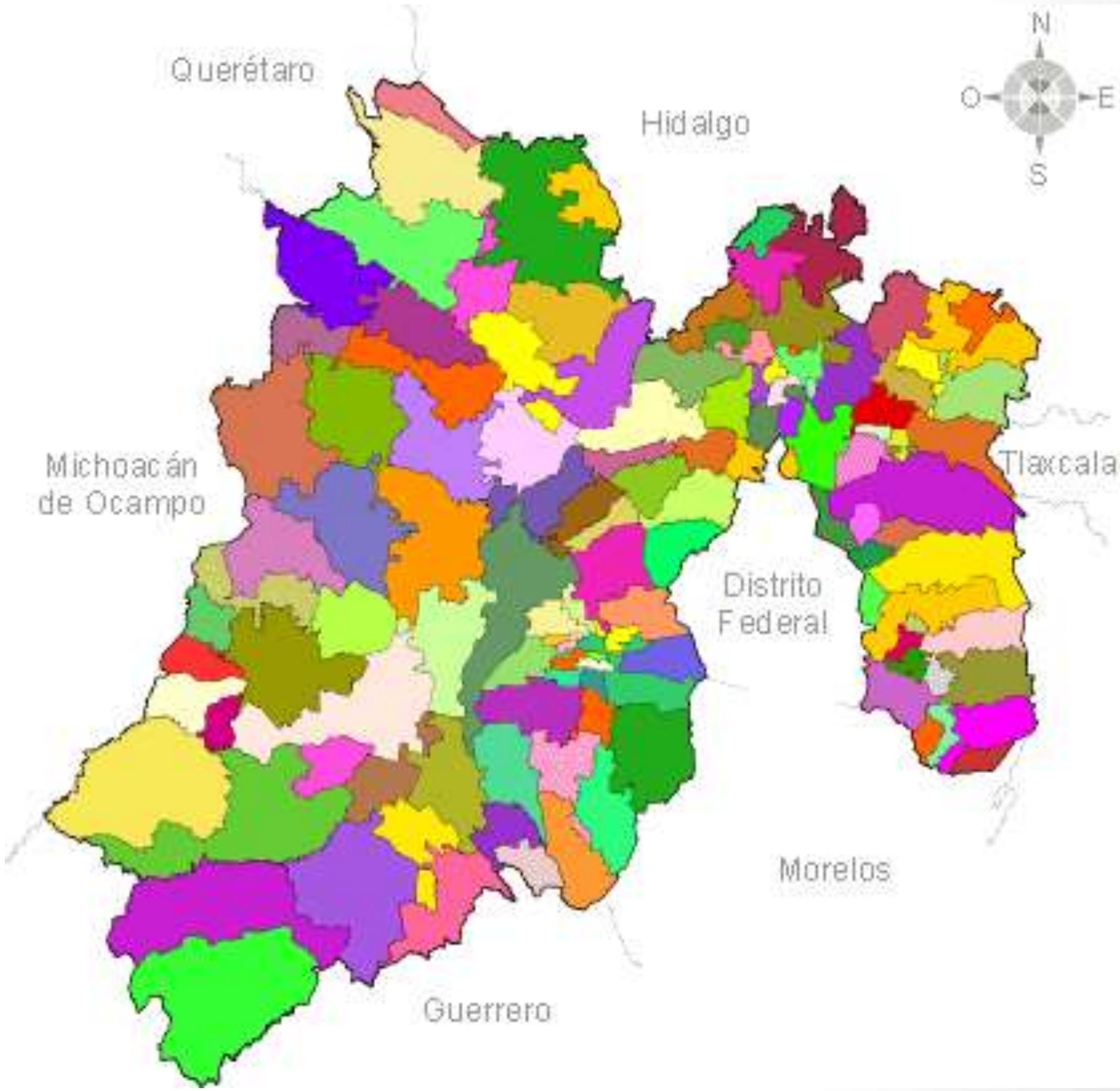
Integrante del Comité Técnico para el Seguimiento y Evaluación de los Trabajos de Distritación

Contenido

- El Problema de distritación electoral.
- Espacio de soluciones.
- Modelo de Optimización Combinatoria.
  - Restricciones del modelo.
  - Función Objetivo.

El Problema de Distritación Electoral

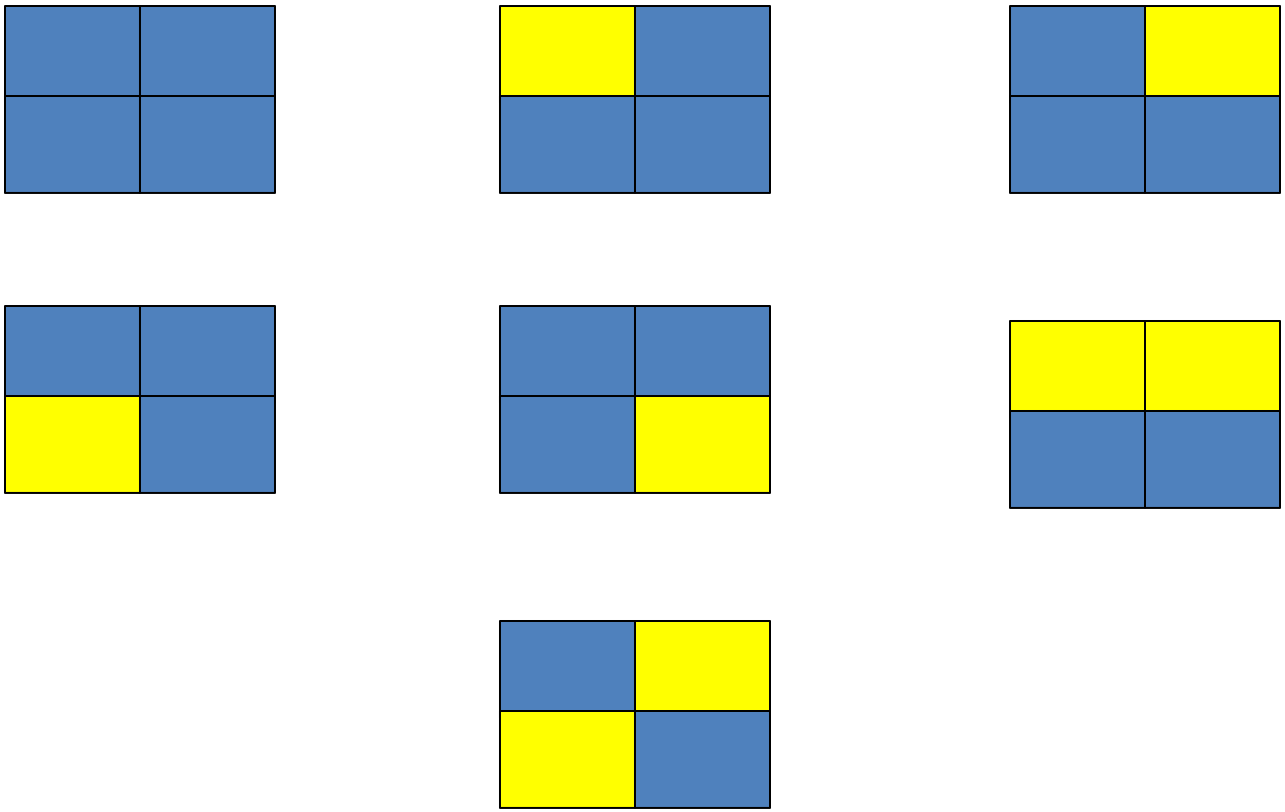
Agrupar un conjunto de unidades geográficas (UG) en distritos electorales, tales que minimizan una función objetivo y satisfacen ciertas restricciones



Espacio de soluciones

Escenarios distintos con

Distritos = 2, UG = 4:



Espacio de soluciones

Formalmente, el número total de planes distintos puede ser calculado, utilizando m unidades geográficas para obtener n distritos, de acuerdo con el número de Stirling del segundo tipo :

$$S(m,n) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\left(\frac{n!}{(n-i)!i!}\right)(n-i)^m$$

Caso EDOMEX: n=45 y m = 6430

¿Cuántas soluciones distintas hay?

- Número de átomos en el Universo:

  entre **10^{77}** a **10^{80}**

- Número de soluciones de un problema de 263 UG y 2 distritos:

  10^{80}

- Si una computadora analizara 100 millones de soluciones por segundo, analizaría **3.1536×10^{15}** soluciones en un año.

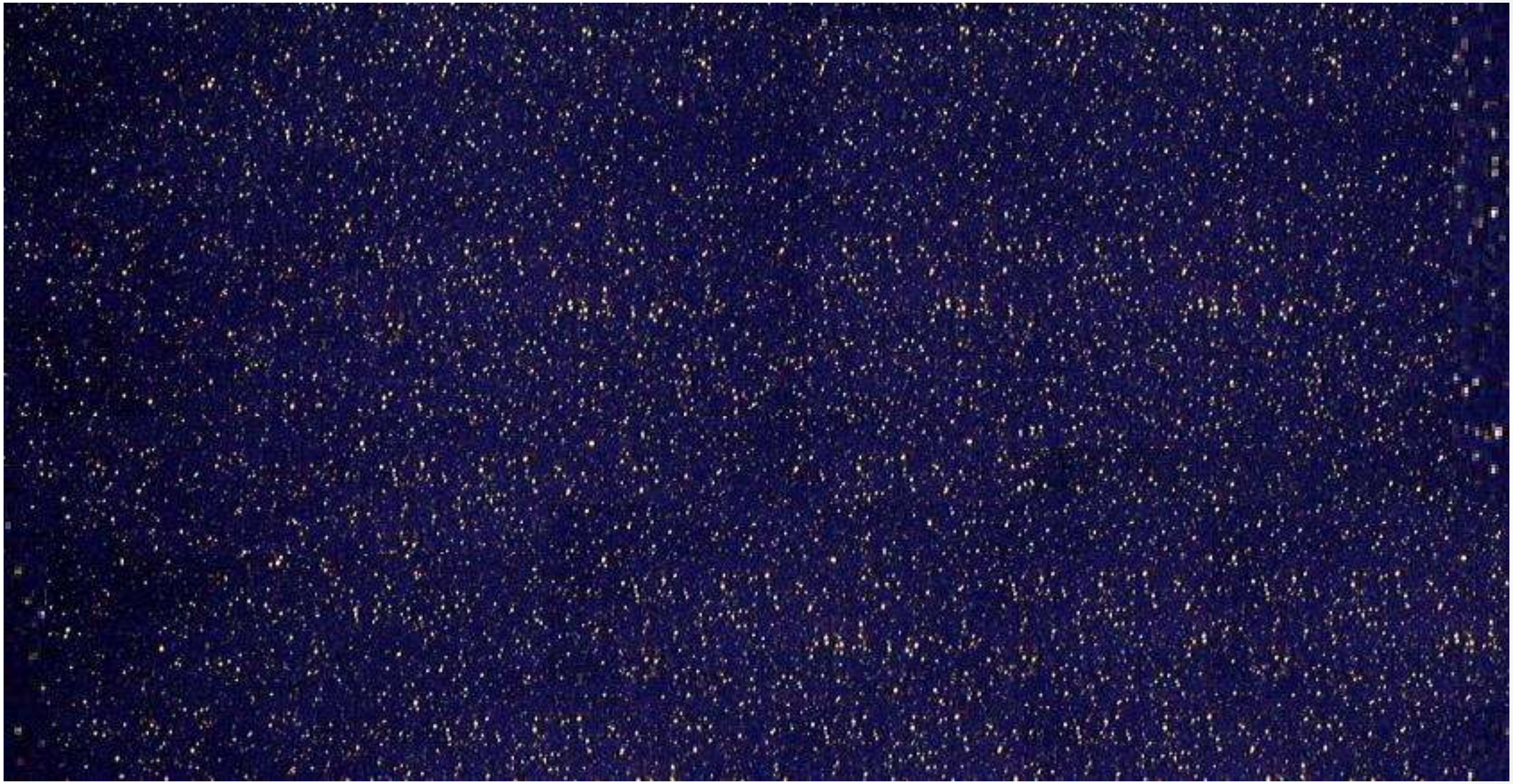
- Esta computadora se tardaría en analizar todas las soluciones

  3.171×10^{64} años

- Edad del Universo desde el Big Bang

  $(13.798 \pm 0.037) \times 10^{9}$ años

ESPACIO DE SOLUCIONES



¿Cómo seleccionar una solución?

Modelo de Optimización Combinatoria

Un Modelo de Optimización Combinatoria tiene dos componentes:

I. Una función Objetivo

II. Un conjunto de restricciones

Un Modelo de Optimización Combinatoria "Sencillo"

Supongamos que queremos seleccionar a una mujer para modelo en un desfile de modas.

El **objetivo** es encontrar una mujer de 1.65 metros de estatura.

La **función objetivo** es:

$$\text{minimizar } |\text{Estura}(m)-1.65|$$

La **restricción** es: *m* es una mujer.

Un Modelo de Optimización Combinatoria “Sencillo”

$$\min \ |\text{Estura}(m)-1.65|$$

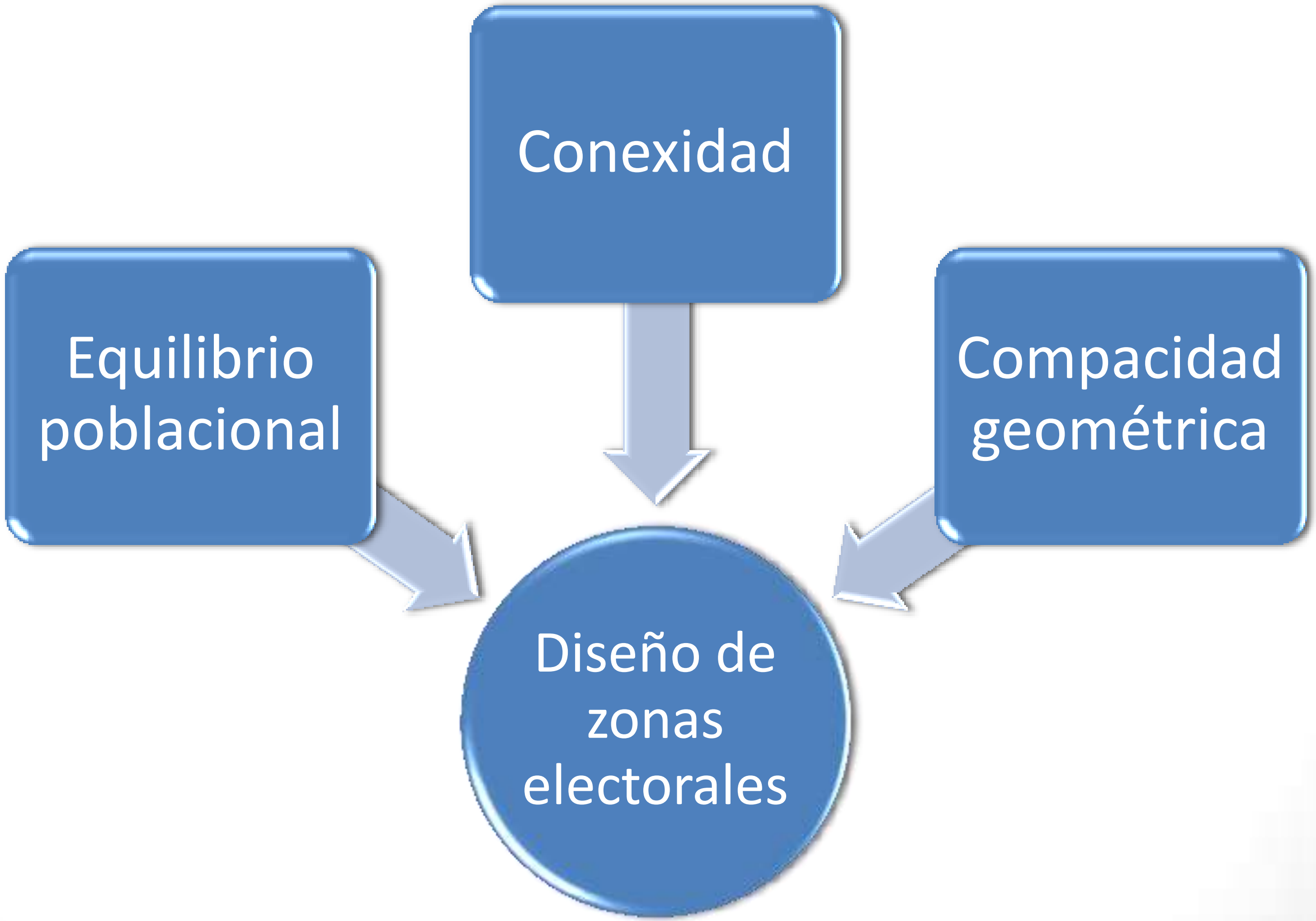
a) *m* es una mujer que viva en México.
b) Edad entre 18-25 años.
c) Peso entre 45-60 kilos.
d) Medidas 90-60-90.
e) Cabello largo.

Etc.

Zonas electorales

Diseño de zonas electorales

Zonas electorales



Características del problema

- Conexidad
- Equilibrio poblacional
- Compacidad geométrica

Características del problema

- Conexidad
- Equilibrio poblacional
- Compacidad geométrica

Capacidad de conectar unidades geográficas de una zona mediante unidades que también formen parte de dicha zona.

Es una restricción del problema.

Características del problema

Conexidad

Equilibrio poblacional

Compacidad geométrica

Busca que todas las zonas contengan la misma cantidad de habitantes y penaliza las diferencias.

Se incluye en la función objetivo

Características del problema

- Conexidad
- Equilibrio poblacional
- Compacidad geométrica

Busca que las zonas sean homogéneas y sin irregularidades o figuras confusas.

Se incluye en la función objetivo

Restricciones del Modelo

a) La entidad se dividirá en *n* distritos electorales.
b) Los distritos serán continuos y contiguos.
c) Cada distrito debe tener a lo más una desviación poblacional dentro del *d*% de la media estatal o la media nacional (según sea el caso).
d) Integridad municipal, al considerar a los municipios que en forma integral se agruparán para formar un distrito.
e) Barreras geográficas y tiempos de traslado.

Restricciones del Modelo

f) Todo aquel municipio que pueda ser separado en un número entero de distritos dentro del *d*% de la desviación poblacional le serán asignados ese número de distritos y serán divididos hacia su interior.

g) Mecanismos para favorecer la agrupación de municipios con mayoría indígena.

Función Objetivo

- La función objetivo califica la calidad de las soluciones (o escenarios) que cumplen con todas las restricciones (soluciones factibles).
- Guía a los algoritmos de búsqueda a ir mejorando las soluciones que se van obteniendo.

Equilibrio poblacional

La desviación del promedio poblacional de cada distrito electoral, debe estar a ±*d*%, esto significa que si

P_D = Población del distrito y

P_M = Población media estatal

entonces la población de cualquier distrito está dentro de este criterio si cumple con la siguiente desigualdad:

$$P_M - d/100^* \, P_M \leq P_D \leq P_M - d/100^* \, P_M$$

Equilibrio poblacional

Haciendo algunas operaciones algebraicas se llega a lo siguiente:

$$- d/100 * P_M \leq P_D - P_M \leq + d/100 * P_M$$

$$-1 \leq \frac{100}{d}\left(\frac{P_D}{P_M} - 1\right) \leq 1$$

$$\left|\frac{\frac{P_D}{P_M} - 1}{d/100}\right| \leq 1$$

Equilibrio poblacional

En virtud de lo anterior, la fórmula de equilibrio poblacional, para un distrito electoral D, es igual a:

$$C_1(D) = \left(\frac{1 - {P_D}/{P_M}}{d/100} \right)^2$$

Donde:

P_D = Población del distrito y

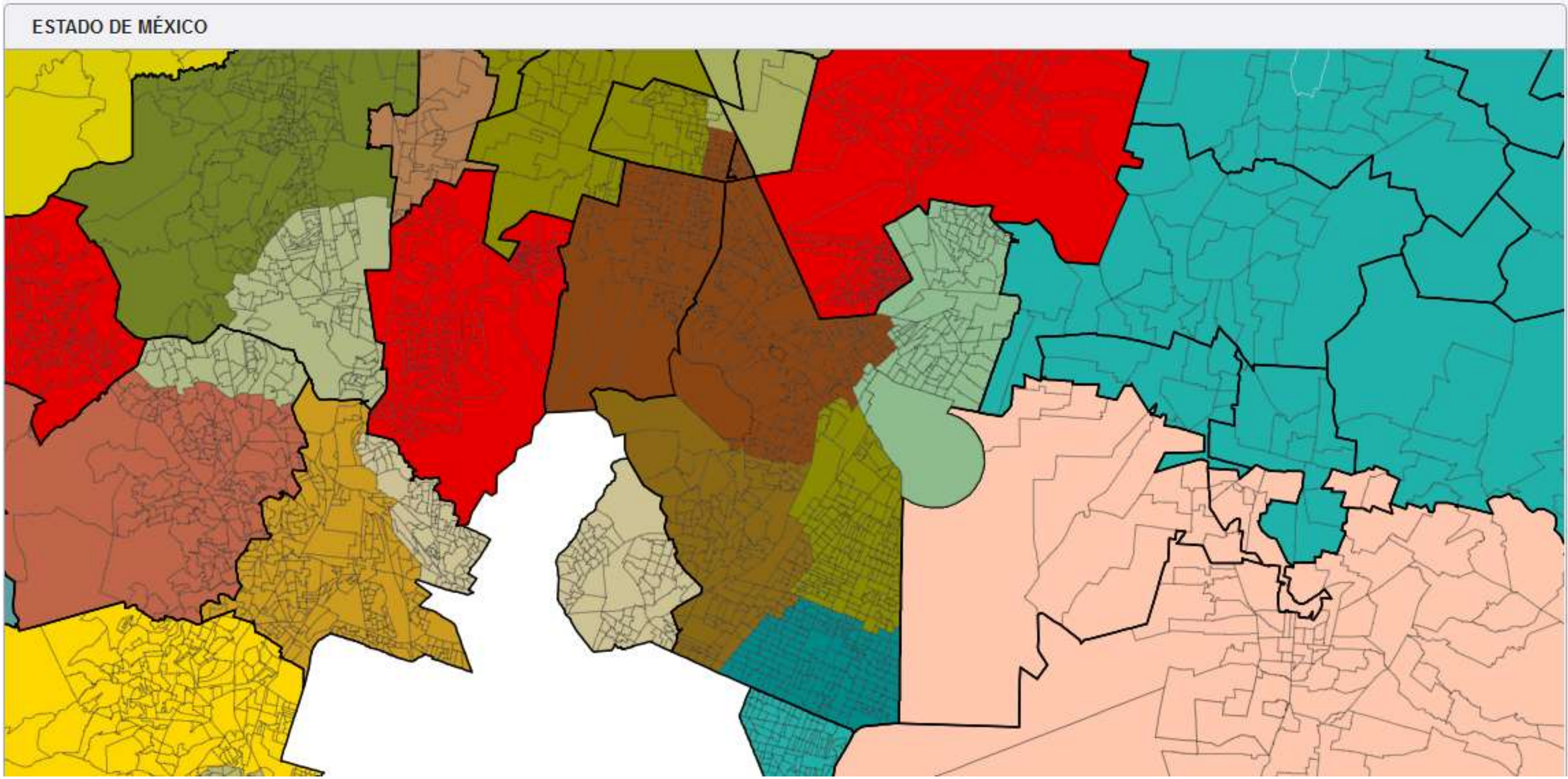
P_M = Población media estatal

d = Desviación máxima permitida de la media estatal.

Compacidad geométrica

Compacidad, entendida como la situación en la que el perímetro de los distritos adquiera una forma geométrica lo más cercana a ***un polígono regular;***

CON COMPACIDAD



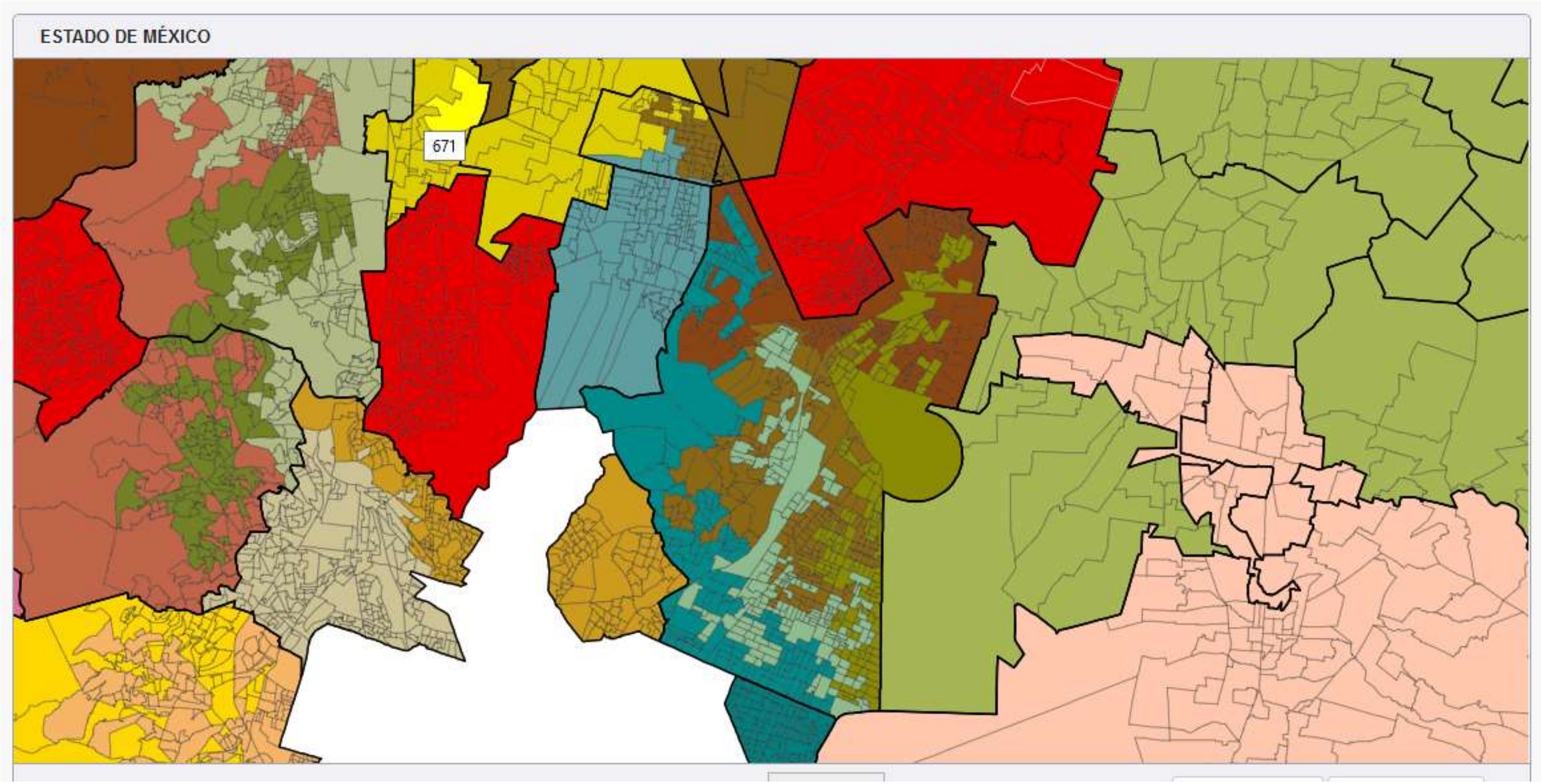
CON COMPACIDAD

Población
337743
336995
335812
336911
337122

Promedio municipal = 336916.6

Desviación media = 444.08

SIN COMPACIDAD



SIN COMPACIDAD

Población
336855
336923
336906
336983
336916

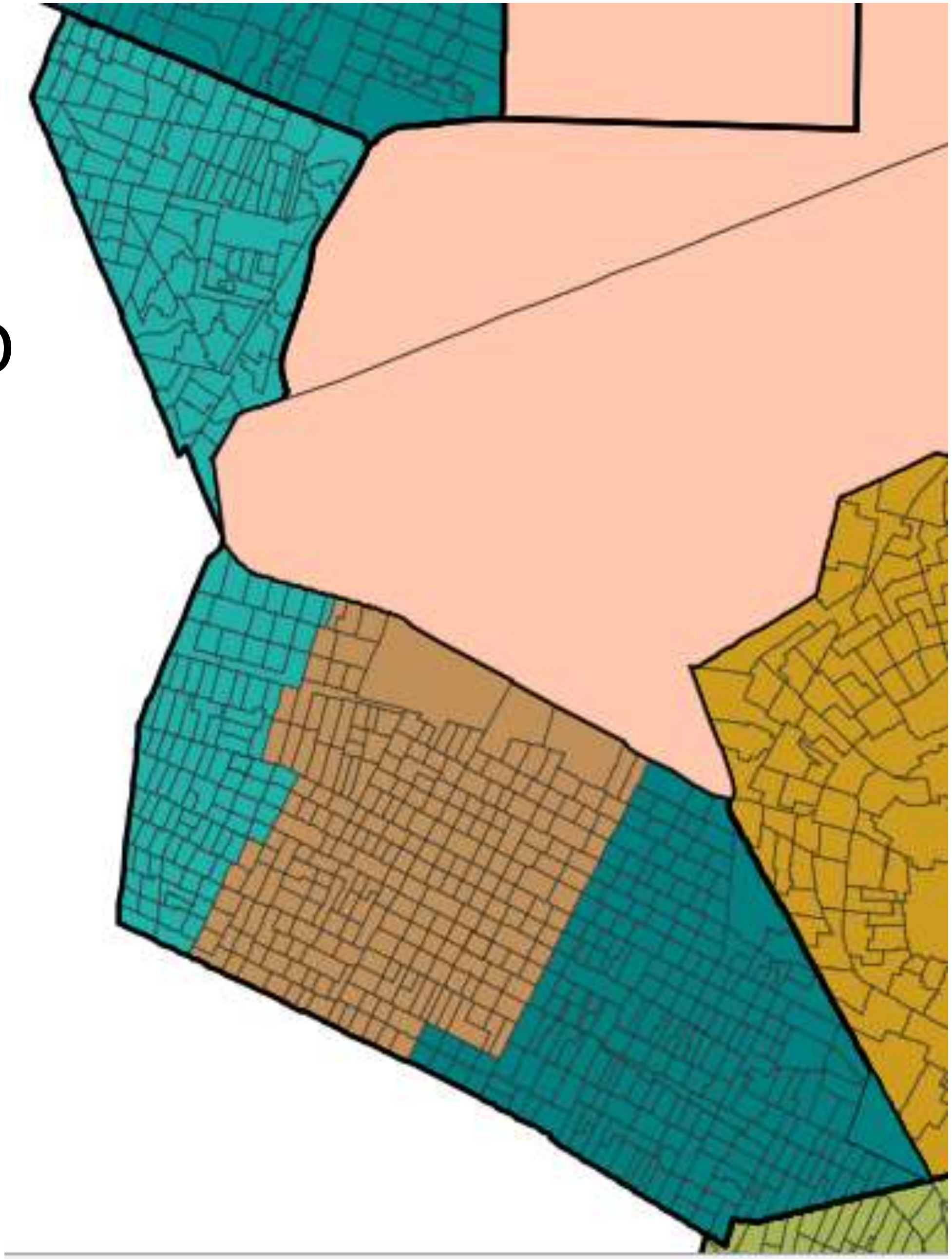
Promedio municipal = 336916.6

Desviación media = 29.12

CON COMPACIDAD

Promedio municipal = 363889.67
Desviación media = 1708.44

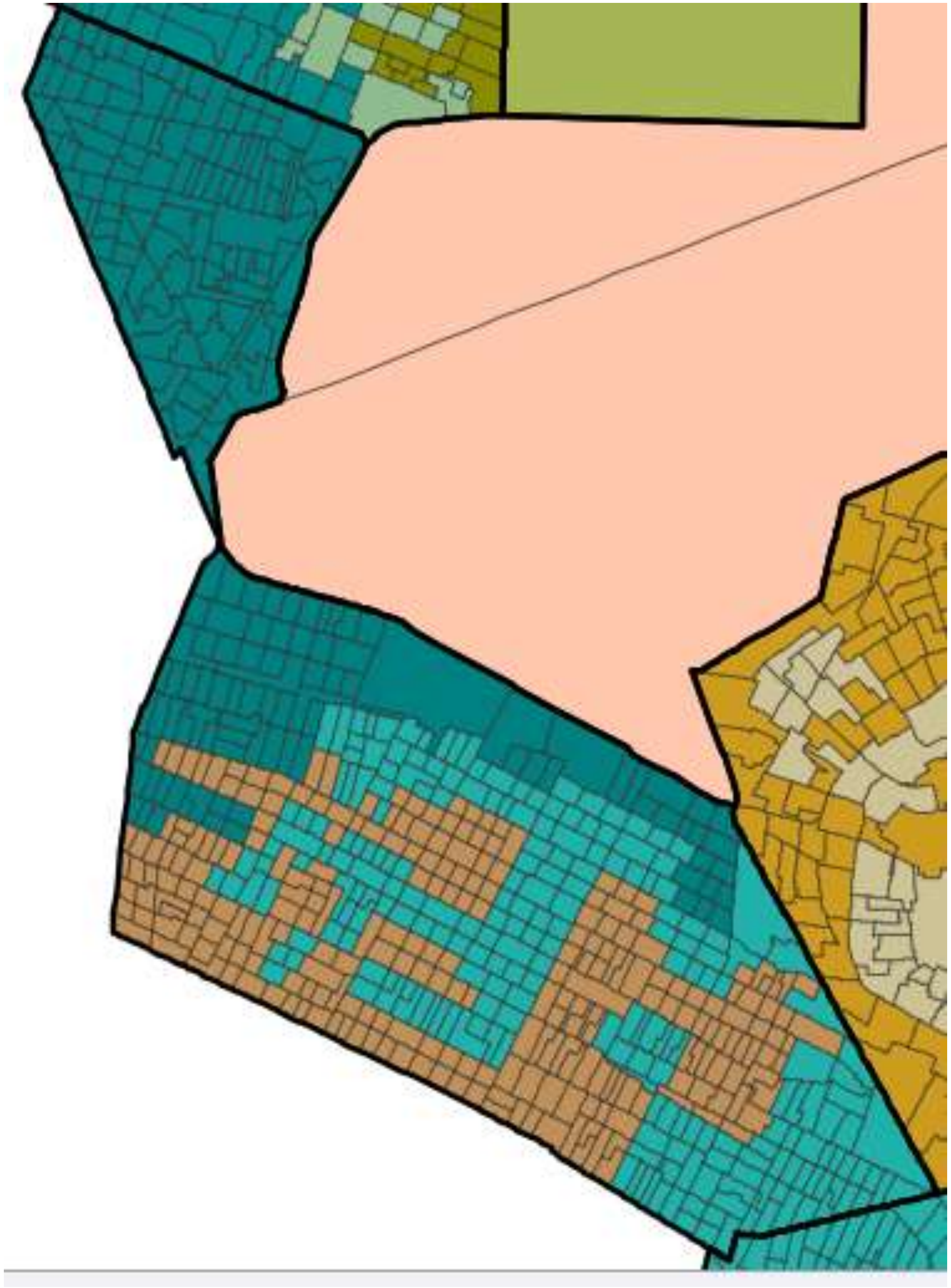
Población
365911
361327
364431



SIN COMPACIDAD

Promedio municipal = 363889.67
Desviación media = 0.33

Población
363890
363889
363890



Compacidad geométrica

En la literatura sobre estudios de diseño de zonas y en particular sobre distritación electoral se proponen muchas formas de calcular la compacidad geométrica tales como: envolventes conexas, cuadriculado, comparación de círculos inscritos, etc.

Una fórmula para el cálculo de la compacidad geométrica que se ha usado y que da muy buenos resultados y su cálculo numérico se obtiene fácilmente es:

$$k * \left(\frac{\text{Perímetro del distrito}}{\sqrt{\text{Área del distrito}}} \right)$$

- Donde k es una constante que hace la expresión anterior igual a uno dependiendo del polígono regular que se quiera.

Compacidad geométrica

Por ejemplo, si deseamos que para un triángulo equilátero la expresión anterior sea igual a uno, k = 0.21935; para un cuadrado, k = 0.25, etc. En general, para un polígono regular de n lados, la expresión anterior vale uno, si el valor de k es igual a:

$$k = \frac{1}{2\sqrt{n \tan(\pi / k)}}$$

Algunos valores de n y k se dan en la tabla siguiente:

n	k
3	0.21935
4	0.25000
5	0.26233
6	0.26864
7	0.27233
8	0.27467
9	0.27626
10	0.27738
…	…
n>>0	0.28209

Compacidad geométrica

Se propone la expresión:

$$\left(\frac{\text{Perímetro del distrito}}{\sqrt{\text{Área del distrito}}} * 0.25 \right)$$

Donde 0.25 corresponde al coeficiente que hace la expresión igual a 1 si la forma del distrito corresponde a un cuadrado.

Se eligió un cuadrado porque dentro de los polígonos regulares, los únicos capaces de formar una teselación son los cuadrados, triángulos equiláteros y hexágonos.

Compacidad geométrica

La fórmula de compacidad geométrica, para un distrito electoral D, es igual a:

$$C_2(D) = \left(\frac{\text{Perímetro del distrito}}{\sqrt{\text{Área del distrito}}} * 0.25 - 1 \right)$$

Función Multiobjetivo

$$C_1(D_i) = \left(\frac{1 - {P_{D_i}}/{P_M}}{d/100} \right)^2 \qquad C_2(D_i) = \left(\frac{\text{Perímetro del distrito}_i}{\sqrt{\text{Área del distrito}_i}} * 0.25 - 1 \right)$$

$$f(E) = \alpha_1 \sum_{i=1}^{n} C_1(D_i) + \alpha_2 \sum_{i=1}^{n} C_2(D_i)$$

Donde

$E = \{D_1, D_2, \ldots, D_n\}$, es un escenario (plan distrital)

D_i = es un distrito electoral formado por un conjunto de *UG* (secciones, conglomerados o municipios).

¿Cómo se resuelve el modelo?

- Métodos exactos
  - Obtienen soluciones mínimas.
  - El tiempo de solución es muy grande.
  - No son prácticos para este tipo de problemas.

- Métodos heurísticos
  - No garantizan solución mínima.
  - El tiempo de solución es “razonable”.
  - Dan soluciones “cercanas” al óptimo (llegan a un mínimo local).

Conclusión

DIFERENCIA ENTRE:

- Modelo de Optimización Combinatoria.
- Algoritmos de Solución.
- Variables del Modelo.

Gracias por su atención