Instituto Nacional Electoral

Propuestas de los criterios técnicos y del modelo matemático para la distritación

Entidades con proceso electoral en 2016 y 2017

Presentación del Modelo Matemático

12 de marzo de 2015

Democracia
Justicia
Igualdad

- ¿ Cómo subdividir una entidad en distritos electorales de modo que se reflejen los principios de **democracia, justicia e igualdad**?

- ¿ Cómo agrupar secciones electorales para formar distritos electorales de manera **justa y razonable**?

Modelación Matemática

- Algo qué optimizar
- Sujeto a ciertas condiciones

1. **Función de costo**
   a) Desviación poblacional
   b) Compacidad geométrica
2. **Restricciones**
   a) Integridad seccional
   b) Conexidad
   c) Enclaves
   d) Integridad municipal
   e) Tiempos de traslado

1.a. Desviación poblacional

- Si **P** es la población de una entidad donde se eligen **n** diputados, lo ideal es que la población de cada distrito se acerque lo más posible a la media estatal **Q = P/n**

$P(k)$: población del distrito k

$$\sum_{k=1}^{n} P(k) = P(1) + P(2) + \ldots + P(n) = P$$

El mayor equilibrio se logra cuando la suma de las desviaciones (en valor absoluto) es mínima $\sum_{k=1}^{n} |Q - P(k)|$

1.a. Desviación poblacional

Ejemplo: P = 600,000

n = 3 Q = 600,000/3 = 200,000

	Escenario A			Escenario B		
distrito (k)	población P(k)	$\|Q-P(k)\|$	$[Q-P(k)]^2$ (millones)	población P(k)	$\|Q-P(k)\|$	$[Q-P(k)]^2$ (millones)
1	220,000	20,000	400	220,000	20,000	400
2	200,000	0	0	190,000	10,000	100
3	180,000	20,000	400	190,000	10,000	100
sumas	600,000	40,000	800	600,000	40,000	600

$$\sum_{k=1}^{n}(Q-P(k))^2$$

- A menor valor, mayor equilibrio poblacional.

1.a. Desviación poblacional

Para medir la desviación poblacional se propone la fórmula:

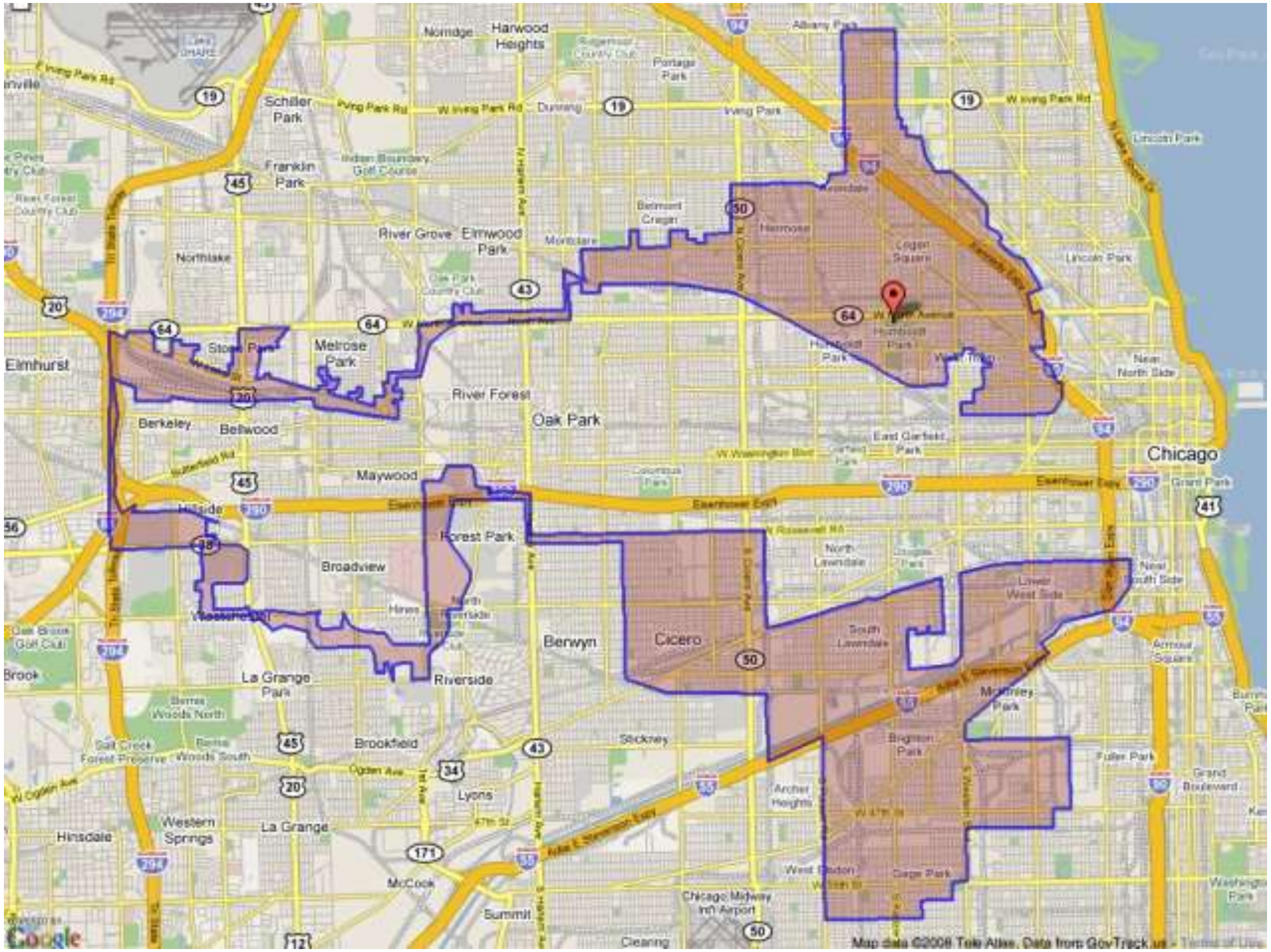
$$\frac{1}{D^2 n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{Q - P(k)}{Q}\right)^2$$

1.b. Compacidad geométrica

La forma de cada distrito debe ser tan **compacta** como sea posible.

- Que pueda **empacarse en un espacio** relativamente pequeño.
- Que tenga **pocas salientes y entrantes**.
- Que sus **límites** sean **poco sinuosos.**
- Que tienda a una forma de **polígono regular.**

1.b. Compacidad geométrica



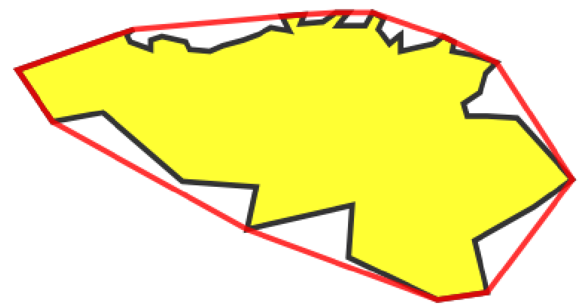
Gerrymandering

1.b. Compacidad geométrica

- Medidas de compacidad geométrica

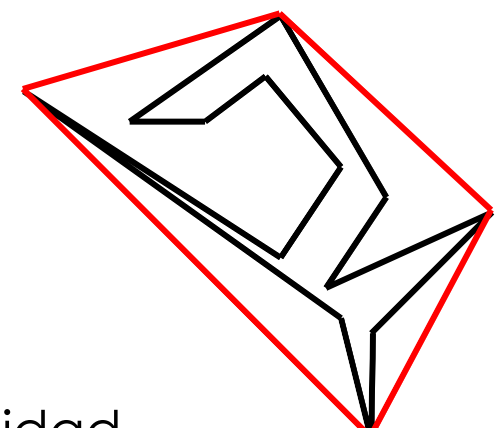
Cáscara convexa

$$\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{A(k)}{A_c(k)}\right)$$



Área del distrito

$A_c(k)$ Área de la cáscara convexa



- A menor valor, mayor compacidad geométrica

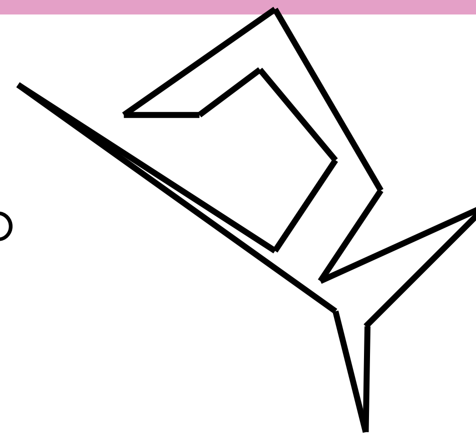
1.b. Compacidad geométrica

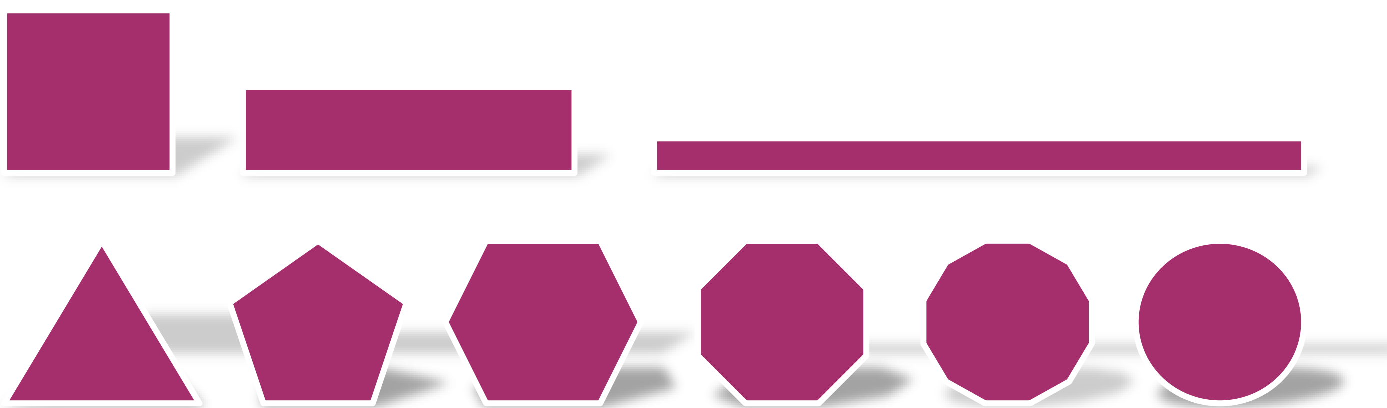
Perímetro

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{B(k)}{A(k)}\right)$$

Perímetro del distrito

Área del distrito





- A menor valor, mayor compacidad geométrica

1.b. Compacidad geométrica

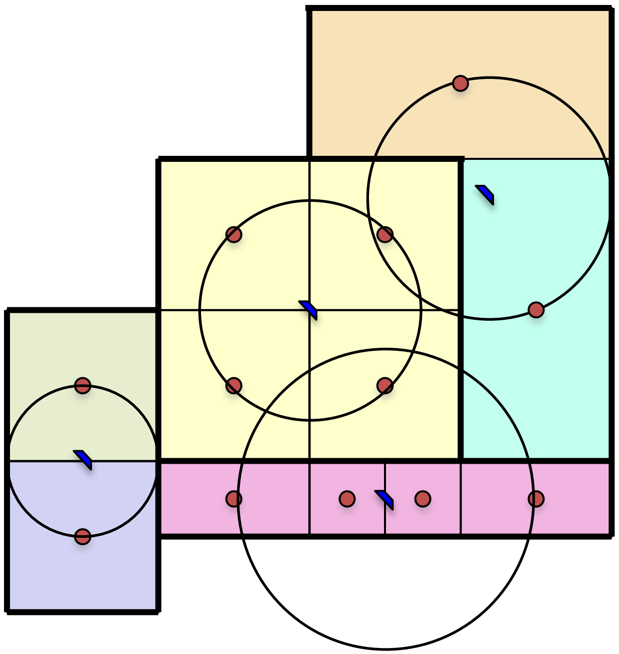
Para medir la **compacidad geométrica** se propone la fórmula

$$\frac{1}{bn}\sum_{k=1}^{n}\frac{A'(k)}{A(k)+A'(k)}$$

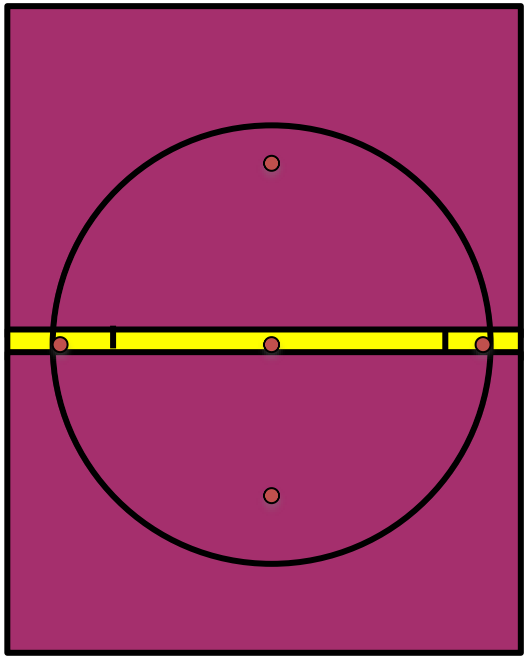
$A'(k)$ - área de las secciones ajenas al distrito *k*, con centroide dentro del círculo mínimo que abarca los centroides de las secciones del distrito *k*.

- Intuitivamente, para cada distrito **se busca la posición y el tamaño de un círculo** que mejor aproxima la geometría del distrito.
- Se cuantifica el área dentro del círculo que **no pertenece al distrito**.
- A mayor área, menor compacidad.

1.b. Compacidad geométrica

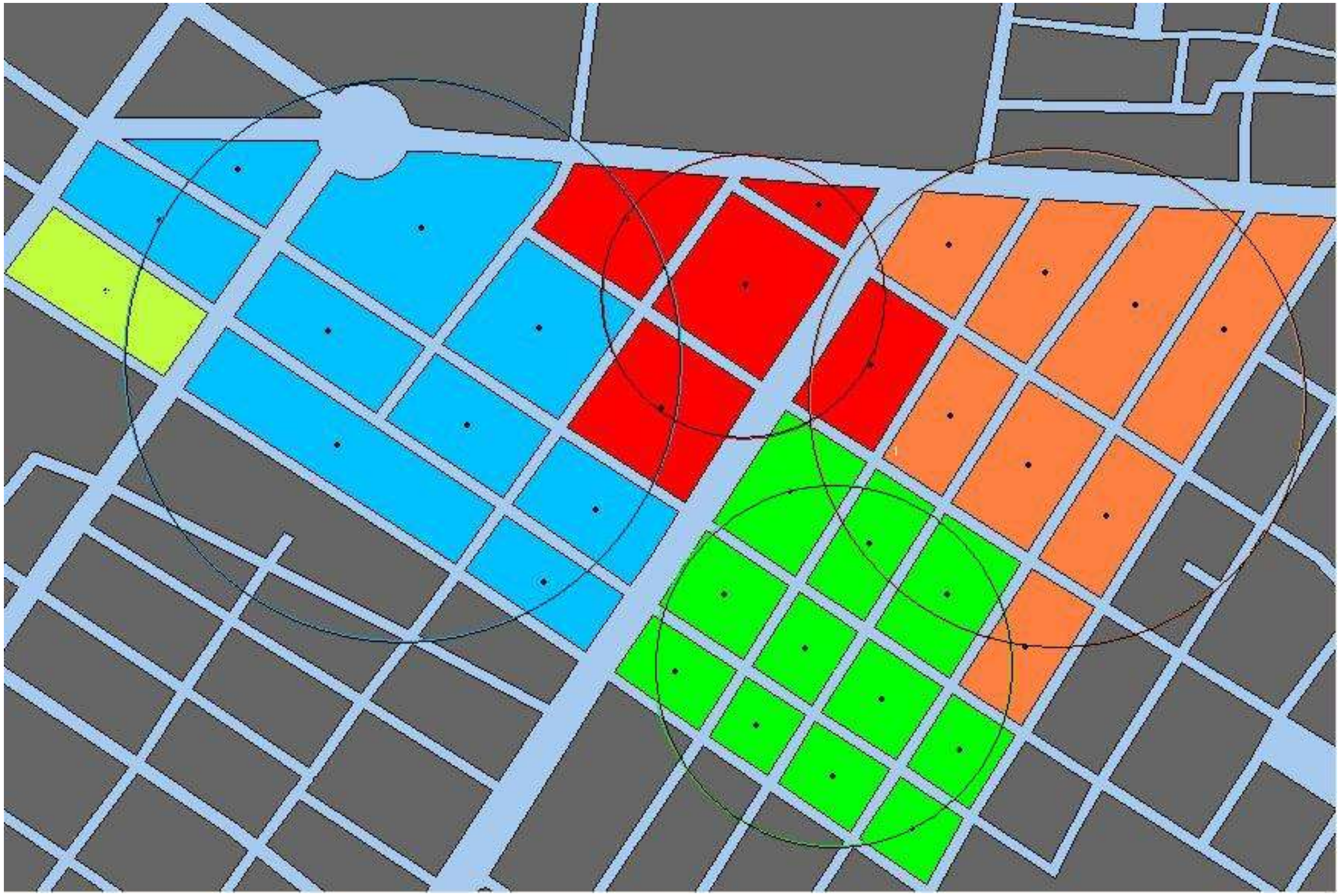


12 secciones, 4 distritos.
Dos con óptima compacidad geométrica.
Los otros dos tienen una sección invasora.

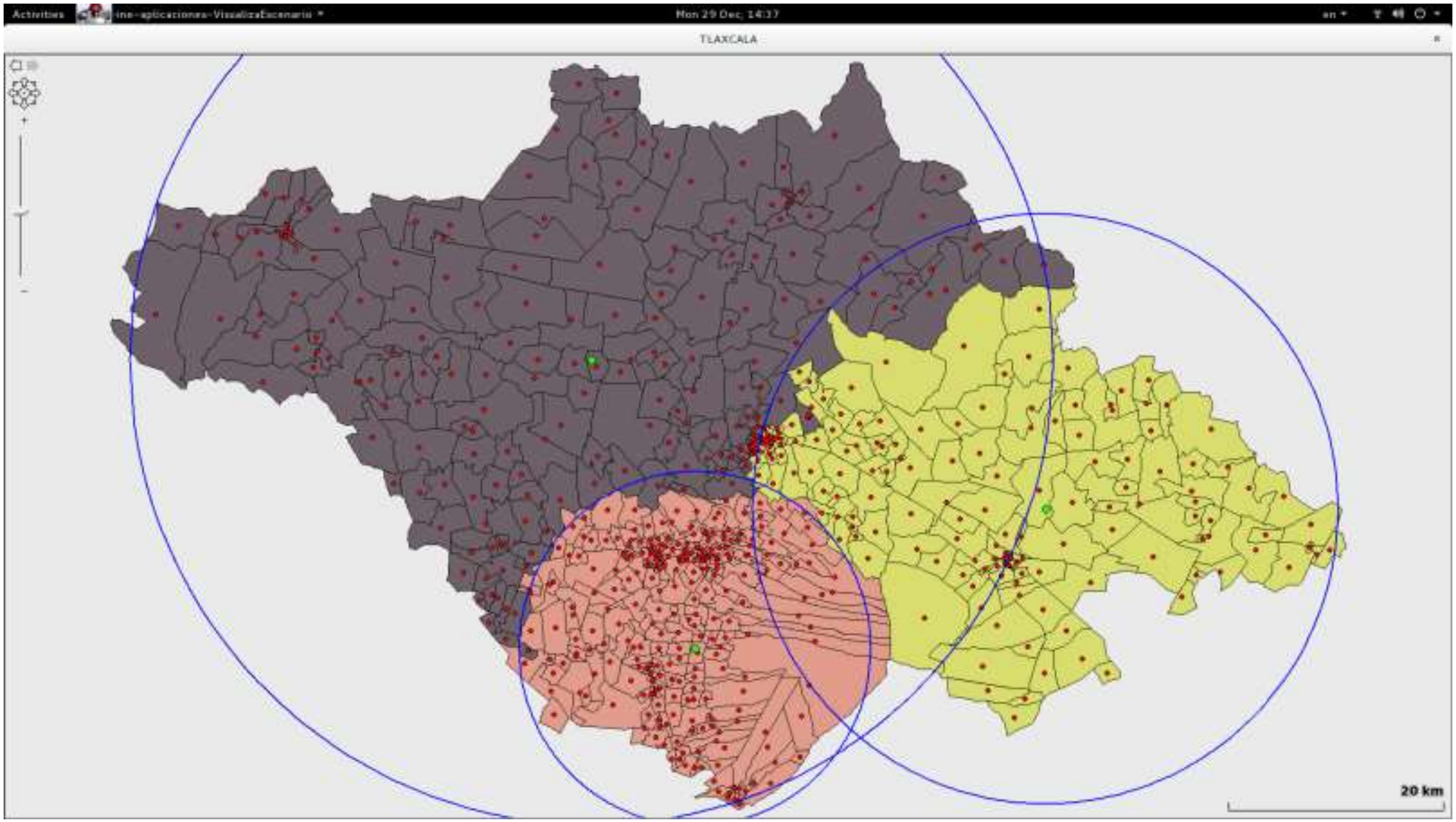


El distrito amarillo tiene poca compacidad geométrica.

1.b. Compacidad geométrica



1.b. Compacidad geométrica



1.b. Compacidad geométrica

Se desea :

- El mayor **EQUILIBRIO POBLACIONAL**
- La mayor **COMPACIDAD GEOMÉTRICA**

Modelo matemático que:

- Incorpore ambos aspectos
- Facilite compararlos (normalización)
- Permita priorizarlos (ponderación)
- Sea sencillo (más manejable, más entendible)

Función objetivo

$$Z = a_1 \frac{1}{D^2 n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{Q - P(k)}{Q} \right)^2 + a_2 \frac{1}{bn} \sum_{k=1}^{n} \frac{A'(k)}{A(k) + A'(k)}$$

n número de distritos

Q media estatal

$P(k)$ población del distrito k

D máxima desviación poblacional

$A(k)$ área del distrito k

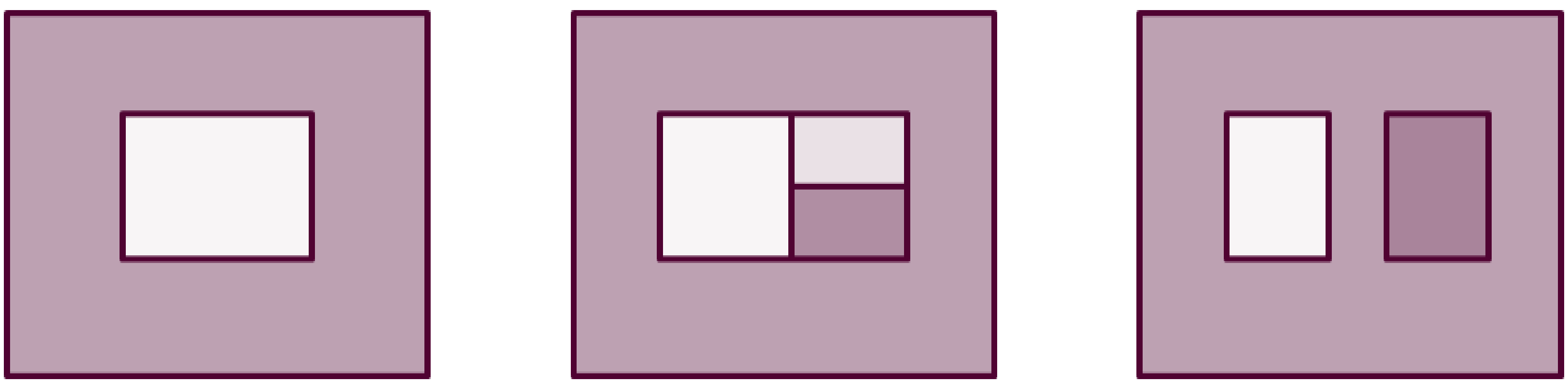
$A'(k)$ área invasora en el distrito k

a_1, a_2 factores de ponderación (prioridades)

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 100$$

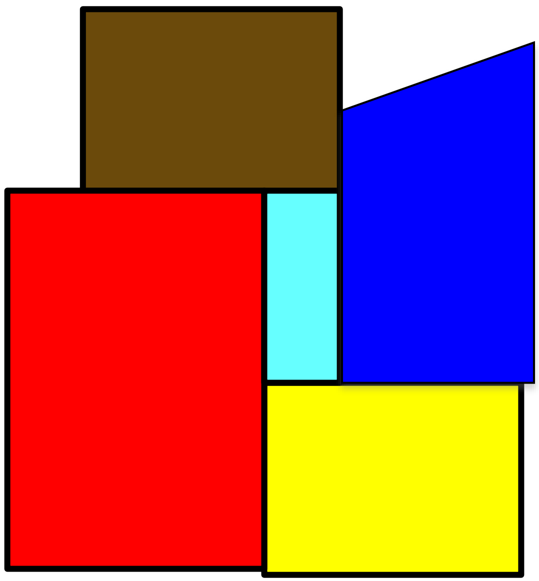
2. Restricciones

a) Integridad seccional
b) Conexidad
c) Enclaves
d) Integridad municipal
e) Tiempos de traslado



2d. Integridad Municipal

- Los municipios deben **fragmentarse lo menos posible.**



Cinco municipios

El distrito redondo tiene
4 fracciones municipales

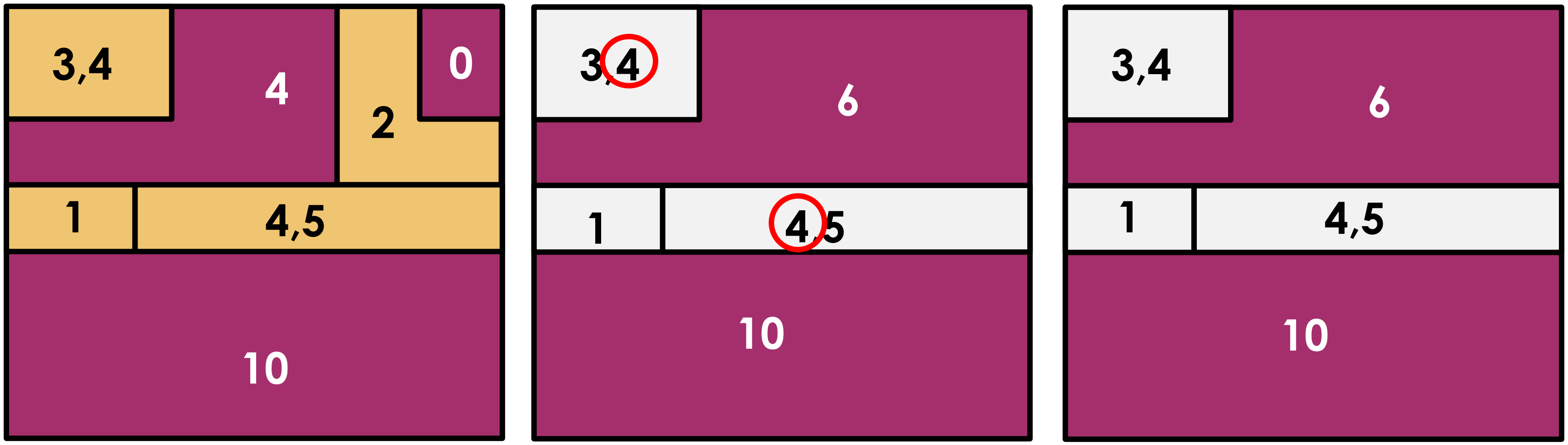
Etapa I

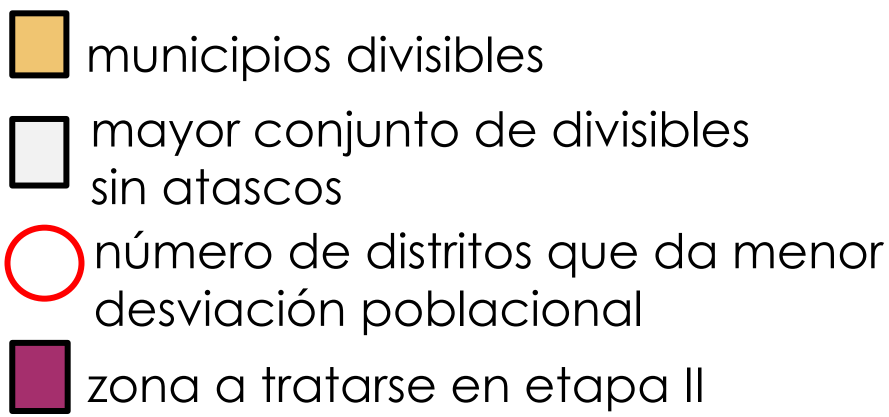
- Determinar los **municipios** en los que cabe **uno o más distritos enteros**. A éstos los llamamos **divisibles**.

- Elegir el **mayor conjunto de municipios divisibles** que no genere atascos y que al mismo tiempo dé como resultado la **menor desviación poblacional.**

2d. Integridad Municipal

Entidad a dividir en 25 distritos





2d. Integridad Municipal

Etapa II.

Distritos formados por dos o más municipios

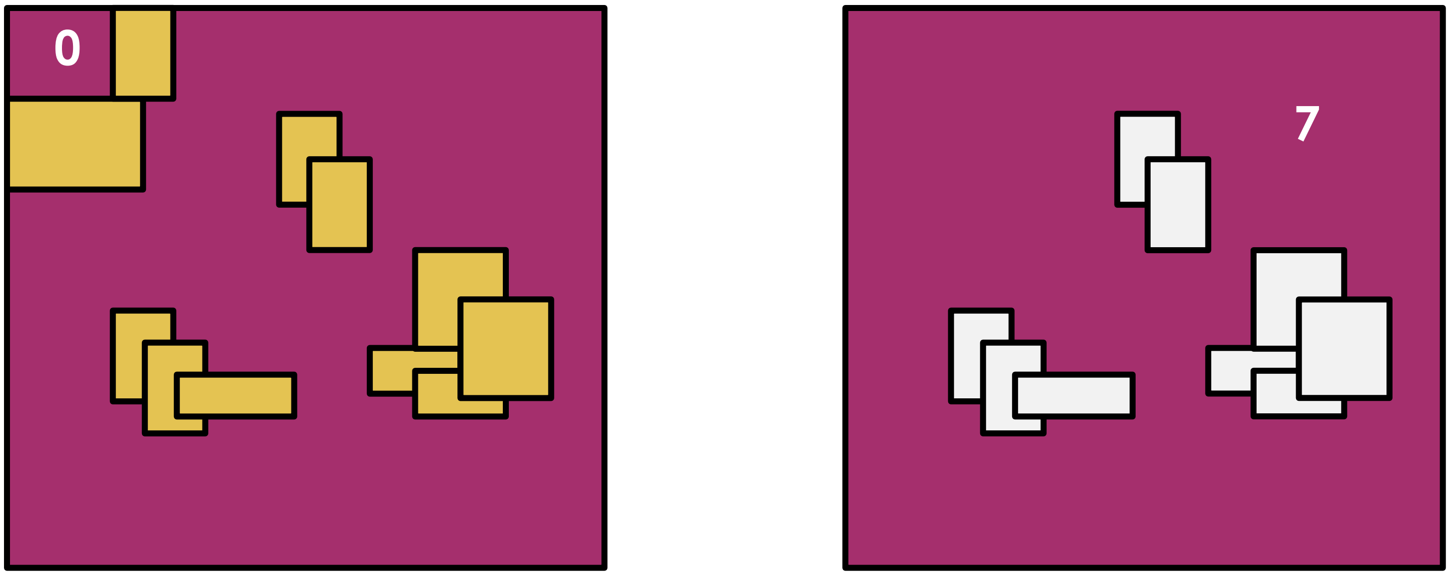
Isla: Conjunto de municipios adyacentes cuya población total da lugar a un distrito completo.

Archipiélago: conjunto de islas que no se traslapan y que, al formar distritos con ellas, no se impide la distritación de los municipios restantes de la entidad.

Archipiélago ganador: archipiélago que implica el mayor número de municipios y da como resultado la menor desviación poblacional.

2d. Integridad Municipal

Componente conexa a dividir en 10 distritos



Islas

Archipiélago que no genera atascos

Zona a dividir en distritos según función de costo

2e. Tiempo de traslado

- Los tiempos de traslado dentro de cada distrito no pueden ser excesivos

- Tiempo (promedio) de traslado entre dos municipios adyacentes t(i,j)

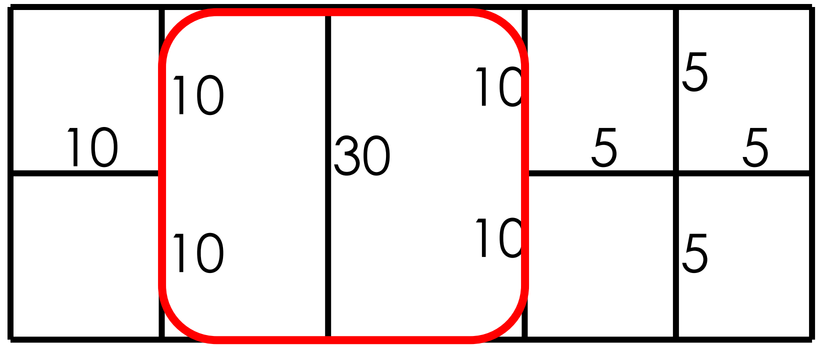
- T - Tiempo promedio de traslado en la entidad, o sea: promedio de todos los t(i,j).

- T_k - Tiempo promedio de traslado en el distrito k, o sea: promedio de los t(i,j) dentro del distrito.

- RESTRICCIÓN: El tiempo promedio de traslado en cada distrito k no puede exceder en mucho el tiempo promedio de traslado en la entidad, o sea:

$$t_k \pounds T + ss$$

2e. Tiempo de traslado



T - Tiempo promedio de traslado en la entidad, o sea: promedio de todos los t(i,j).

T = (5x10 + 4x5 + 30)/10 = 10

Desviación estándar = $\sqrt{(20^2 + 4x5^2)/10} = 7.071$

S = 2

Tolerancia: 10 + 2x7.071 = 24.14

el distrito **rojo** no se acepta ya que el tiempo promedio de traslado en su interior (30) excede la tolerancia.

Una vez formado el modelo matemático de optimización,

¿cómo encontrar una distritación óptima?

Métodos de solución

Algoritmos
- Exactos
  - Fuerza bruta
  - Programación entera
- Heurísticos
  - *Ad hoc*
  - Recocido simulado
  - Búsqueda tabú
  - Algoritmos genéticos
  - Diagramas de Voronoi

Cualidades deseadas:

- Requerir razonables **recursos de cómputo**.
- Producir **distritaciones óptimas** o cercanas al óptimo.